数理解析研究所講究録
710巻 1989年 1-17

構造安定性について

都立大学 理　青 木 統 夫

§1 <u>はじめに</u>

多様体上の常微分方程式（ベクトル場）は適当な仮定のもとで flow（$R\to \mathrm{Diff}(M)$ by $t\to f^t$）を形成する。このような flow の定性理論の研究は Poincaré から始まり、Birkhoffを経て今日に至っている。1938年に Andronov と Pontrjagin はflow の安定性を定義した。Peixoto は２次元の flow の安定性を研究し、その成果を得た。 しかし高次元の場合、flow の挙動は複雑であるが故に、安定性の研究は困難であることが分かって来た。 Smale は写像の研究の重要性を強調し、双曲性をもつ離散力学系に対し、改めて安定性問題を提起した。

微分方程式から起こる力学系を理解する方法としての離散力学系は、いろいろな分野からの興味と技法の導入によって、その研究対象は広がっている。この小論では応用において重要である安定性問題を中心に、最近 Mañé によって解決された安定性問題の最終結果を解説する。

§2 <u>安定性</u>

離散力学系の位相的理論の研究に現れる概念の１つに位相共役がある。滑らかな多様体 M 上で力学系 $f,g\in \mathrm{Diff}(M)$ があるとき、f と g が<u>位相共役</u>であるとは同相写像 $h: M\to M$ が存在して $g\circ h=h\circ f$ が成り立つときをいう。

このことが成り立つ簡単な例に次がある。

(1)　$f(x)=2x$，$g(x)=8x$ $(x\in R)$ とすると、$h(x)=x^3$ によって $h\circ f(x)=h(2x)=8h(x)=g\circ h(x)$ $(x\in R)$ である。

(2)　$f(x) = 2x$, $g(x) = -2x$ $(x \in \mathbb{R})$ のとき、g の向きは f の向きの逆である。このことから f と g は位相共役ではない。

(3)　$f(x) = 2x$, $g(x) = (1/2)x$ $(x \in \mathbb{R})$ のとき、$\lim_{n\to\infty} g^n(x) = 0$, $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \infty$ $(x \in \mathbb{R})$ である。よって f と g は位相共役ではない。

力学系理論の安定性には２つの概念がある。その１つが構造安定性である。Ｍはコンパクトで境界をもたないとする。Diff(M) はC^1-位相が導入された微分同相写像の集合とする。力学系$f \in$ Diff(M)に対して f が構造安定であるとは Diff(M) の中の f の近傍 $N(f)$ が存在して、すべての $g \in N(f)$ は f と位相共役であるときをいう。

構造安定性の概念が形成された動機は次のように説明される。
ある物理系Ｓに対して、多様体Ｍの点がＳの状態を表し、時間発展によるＳの状態の変化を記述するものとして、力学系 $g \in$ Diff(M) が対応すると考える。このような物理系Ｓを解明するためには g を知ることである。観測によって f を知っても観測誤差をともなっている。しかし、くりかえしの観測から得られる力学系が互いに近ければ、即ち近傍Ｎに力学系が属していれば、真の力学系はその近くに存在すると予測することができる。このときＮのどの２つの力学系も位相共役であれば観測した f から真の力学系 g を知ることができる。

もう１つの安定性にΩ-安定性がある。Ｍはコンパクトであるから、集合

$\Omega(f) = \{x \in M \mid \forall U(x \text{ の近傍}) : \exists n > 0 , U \cap f^n(U) \neq \phi \}$

は空でないf-不変な閉集合である。この集合を非遊走集合という。f の周期点全体の集合 $P(f)$は $\Omega(f)$ に含まれる。

力学系 $f \in$ Diff(M) が Ω-安定であるとは f の近傍 $N(f)$ が存在して、すべての $g \in N(f)$ に対して同相写像 $h : \Omega(f) \to \Omega(g)$ があって $h \circ f = g \circ h$ が成り立つときをいう。

構造安定であることは Ω-安定であることを意味する。このことは定義より明らかである。

Ｍ上のBorel確率測度の全体を $\mathfrak{m}(M)$ で表す。この集合に弱位相を導入する。その位相

に関して $\mathfrak{m}(M)$ はコンパクト距離空間になる。$f\in \mathrm{Diff}(M)$ を不変にする $\mathfrak{m}(M)$ の元の全体を $\mathfrak{m}_f(M)$ で表すとき、$\mathfrak{m}_f(M)$ は空でない閉部分集合である。非遊走集合 $\Omega(f)$ はすべての $\mu\in \mathfrak{m}_f(M)$に対して $\mu(\Omega(f))=1$ である。従って f の挙動は $\Omega(f)$ 上に意味をもつ。よってエルゴード理論の立場からも Ω-安定性は重要である。

§3　安定性の諸定理

安定性の定義は系のもつ性質が小さな摂動によって変化しないということである。次の(4)は構造安定ではない。

(4) $S^2=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ とし、$f(z)=ze^{i\theta}$ $(\theta=2\pi/3)$ なる回転とする。このとき $f^3=\mathrm{identity}$ である。g は $\theta=2\pi/3+\varepsilon$ なる回転とすると、$g^3\neq \mathrm{identity}$ から、f の性質は小さな摂動によって変化する。

(5) $f:S^2\to S^2$ は$f(z)=2z\,(z\in\mathbb{C})$、$f(\infty)=\infty$ を満たす微分同相写像とする。このとき $\lim_{n\to\infty} f^n(z)=\infty$, $\lim_{n\to\infty} f^{-n}(z)=0$ $(z\neq 0,\infty)$ である。この場合は構造安定である。

一般に次の定理はC^2－微分同相写像に対して Robin [13], C^1-微分同相写像に対して Robinson [14] によって証明された。

<u>定理１</u>. 力学系 $f\in \mathrm{Diff}(M)$ が Axiom A と強横断性をみたすならば、f は構造安定である。

次の定理は Smale[8]による。しかし論文 [12]によって完全な証明が与えられた。

<u>定理２</u>. 力学系 $f\in \mathrm{Diff}(M)$ が Axiom A と no cycle 条件をみたすならば、f は Ω-安定である。

定理１，２の逆が成り立てば、離散力学系の安定性問題は完全に終結したことになる。

最近 Mañé[1]は次の定理３を、Palis[6] は Mañé の方法を利用して定理４を解決した。

<u>定理３</u>．力学系 $f \in \mathrm{Diff}(M)$ が構造安定であれば、fは Axiom A と強横断性をみたす。

<u>定理４</u>．力学系 $f \in \mathrm{Diff}(M)$ が Ω-安定であれば、f はAxiom A と no cycle 条件をみたす。

定理３，４はどんなアイデアに基ずき、どんな方法論で解決されたか。このことを易しく解説したい。

§４　<u>準備</u>

滑らかなコンパクト多様体Ｍ（境界をもたない）の閉部分集合 Λ が $f \in \mathrm{Diff}(M)$ に対して不変（$f(\Lambda)=\Lambda$）であるとする。このとき $T_\Lambda M = \bigcup_{x\in\Lambda} T_x M$が Df に関して不変な部分空間 E^s, E^uに連続的に分解 $T_\Lambda = E^s \oplus E^u$され

$\| Df^n_{|E} \| < c\lambda^n$　(contracting)

$\| Df^{-n}_{|E} \| < c\lambda^n$　(expanding)

をみたす $c>0$, $0<\lambda<1$ が存在するとき、閉集合 Λ は f に関して<u>双曲型集合</u>であるという。特にＭが双曲型であるとき f は <u>Anosov 微分同相写像</u>であるという。

Anosov 微分同相写像の例に次がある。

(6) R^2上の行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ によって与えられた写像を２トーラス T^2に導入した写像がある。この写像の非遊走集合は空間 T^2全体である。

次の(i),(ii) をみたす微分同相写像 f は <u>Axiom A</u> をみたすという。

(i) $P(f)$ は $\Omega(f)$ の中で稠密である（$\overline{P(f)} = \Omega(f)$），

(ii) $\Omega(f)$ は双曲型である。

f が Anosov であれば、(i),(ii) をみたすから f は Axiom A である。Axiom A をみたす微分同相写像の例に次がある。

(7) $g:S^1 \to S^1$は2つの不動点 $f(x) = x$, $f(y) = y$ $(x \neq y)$をもつ微分同相写像であって、$\lim_{n\to\infty} g^n(z) = x$ $(x \neq z)$, $\lim_{n\to\infty} g^{-n}(z) = y$ $(y \neq z)$ をみたし、$\Omega(g) = \{x,y\}$ は双曲型である。このとき g は Axiom A をみたす。

(8) $g:S^1 \to S^1$は(7)の写像、 $f:T^2 \to T^2$ は(6)の写像とする。このとき $g \times f:S^1 \times T^2 \to S^1 \times T^2$ は Axiom A をみたし、Anosov ではない。

例(7)の写像は Morse-Smale 微分同相写像とよばれる。$f \in \mathrm{Diff}(M)$が Morse-Smale であるとは、$\Omega(f)$は有限集合かつ双曲型であって、安定多様体 $W^s(x)$ と不安定多様体 $W^u(x)$ $(x \in \Omega(f))$が横断的であるときをいう。Morse-Smale微分同相写像は Axiom A をみたすことは明らかである。

Anosov 微分同相写像の全体を $A_n(M)$, Axiom A 微分同相写像の全体を $A_x(M)$, Morse-Smale微分同相写像の全体を$(M+S)(M)$ で表す。このとき、

$A_n(M) \cap (M+S)(M) = \phi$, $A_n(M) \cup (M+S)(M) \subset A_x(M)$

$An(M)$ と $(M+S)(M)$ は $\mathrm{Diff}(M)$ の中で開集合であるが、$A_x(M)$は開集合ではない。しかし、$A_x(M)$の内点集合（$A_x(M)$に含まれる最大な開集合）に属する写像は no cycle 条件をもつ。

（不）安定多様体、横断性、no cycle 条件を説明しよう。$f \in \mathrm{Diff}(M)$, $\varepsilon > 0$ とする。$\forall x \in M$に対して集合

$$W^s_\varepsilon(x) = \{ y \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) \leqq \varepsilon,\ n \geqq 0\}$$

$$W^u_\varepsilon(x) = \{ y \in M \mid d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leqq \varepsilon,\ n \geqq 0\}$$

$$W^s(x) = \{ y \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) \to 0,\ n \to \infty\}$$

$$W^u(x) = \{ y \in M \mid d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \to 0,\ n \to \infty\}$$

を定義する。$f \in A_x(M)$ であるとする。十分小さな$\varepsilon > 0$ に対して

$$\bigcup_0^n f^{-j}(W_\varepsilon(f^j x)) \uparrow W^s(x)$$

$$\bigcup_0^n f^{j}(W_\varepsilon(f^{-j} x)) \uparrow W^u(x)$$

が成り立つ。$W^s(x)$は安定多様、$W^u(x)$ は不安定多様体であるという。Mの部分集合Eに対して、$W^\sigma(E) = \bigcup_{x\in E} W^\sigma(x)$ $(\sigma = s,u)$ とおく。このとき

$$W^\sigma(\Omega(f)) = M$$

$$W^o(x) \cap W^o(y) \neq \phi \Rightarrow W^o(x) = W^o(y)$$

が成り立つから、$\{W^o(x) : x \in \Omega(f)\}$はMの分割である。

$W^s(x)$ と $W^u(y)$ が横断的であるとは、$z \notin W^s(x) \cap W^u(y)$ であるか、あるいは $T_zW^s(x) + T_zW^u(y) = T_zM$ が成り立つときをいう。　また f が強横断的であるとは、$W^s(x) \cap W^u(y) \neq \phi$ なる $x, y \in \Omega(f)$ に対して、$W^s(x) \cap W^u(y) \ni z$ が $T_zW^s(x) + T_zW^u(y) = T_zM$ をみたすときをいう。

$f \in An(M)$は強横断性をみたし、(4)は Anosov でない Axiom A をみたす写像であって強横断性をもっている。

$\Omega(f)$が次のように有限個の閉集合に分解されるとき、この分解を fの spectral decomposition という：

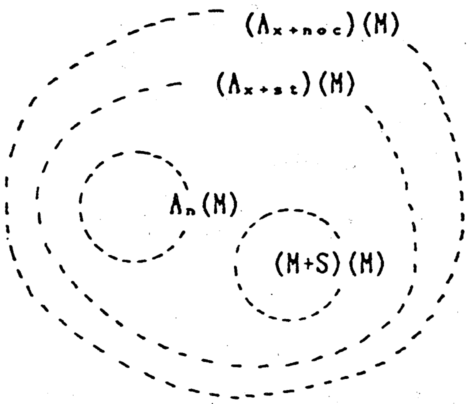
(i) $\Omega(f) = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k$,

(ii) $f(\Omega_i) = \Omega_i$ $(1 \leqq i \leqq k)$,

(iii) $f : \Omega_i \to \Omega_i$は位相推移的 ($\exists x_0 \in \Omega_i$, $\overline{O_f(x)} = \Omega_i$)。

この分解に対して $W^s(\Omega_{n_i}) \cap W^u(\Omega_{n_{i+1}}) \neq \phi$ なる集合列$\Omega_{n_1}, \cdots \Omega_{n_l}, \Omega_{n_{l+1}} = \Omega_{n_1}$が存在するとき、f は cycle 条件をもつという。cycle 条件をもたないとき、f は no cycle 条件をもつという。強横断的条件は no cycle 条件を導く。

no cycle 条件をもつ Axiom A 微分同相写像の全体を $(A_{x+noc})(M)$, 強横断性をみたす Axiom A 微分同相写像の全体を$(A_{x+st})(M)$で表す。各集合の間には次の図のような関係があることを説明して来た。



各集合はDiff(M)の中で開集合である。

§5 定理３、４の証明の概説

$f \in A_x(M)$が構造安定であるときには、f は強横断性をみたすことが Robinson[15]によって解明されている。さらに Ω-安定であるときには、f は no cycle 条件をみたすことが Palis[7] に示されている。

従って、定理３、４は次を証明することだけが残っていた：

$f \in \mathrm{Diff}$ が Ω-安定ならば、f は Axiom A である。

このことを解明するために Mañé は背理法と数学的帰納法を利用している。Ω-安定であれば、Pugh closing lemma[11] によって $\overline{P(f)} = \Omega(f)$ が示される。よって Ω(f) が双曲型であることを示せばよい。これを証明するために、背理法を使って、Ω(f) は双曲型ではないが双曲型の部分集合を含むことを示す。この部分集合の外で assymptotic Borel不変測度を構成し、この測度を利用して小さな C^1-摂動を行い homoclinic point を創り出す。しかし Smale homoclinic point theorem [9] によって、Ω-安定であるときにはhomoclinic point は存在しない。このことから双曲型部分集合は開集合であることが結論される。この開集合を Ω(f) から除き、上のような仕方によって開かつ閉の双曲型の部分集合をみつける。帰納的に続けるとき、Ω(f) は有限個の双曲型集合で被覆され、出発点の仮定に反することになる。

この証明の様子をもう少し詳しく解説しよう。

$f \in \mathrm{Diff}(M)$ が Ω-安定であれば、Franks lemma[10]とKupka-Smale theorem[15]によって、各周期点は双曲型であることが示される。この事実から次の開集合

$$\mathcal{F}(M) = \{f \in \mathrm{Diff}(M) \mid \exists\, u(f)(f\text{の近傍}), \forall g \in u(f) : P(g) \ni x \text{は双曲型}\}$$

を定義すると、

{構造安定な微分同相写像} ⊂ {Ω-安定な微分同相写像} ⊂ $\mathcal{F}(M)$

が成り立つ。従って Ω(f) の双曲性は次の定理から導ける。

<u>定理５</u>　$(A_{x+noc})(M)$ は $\mathcal{F}(M)$の中で稠密である。

$\dim(M) = 2, 3$ のとき、$(A_{x+noc})(M) = \mathcal{F}(M)$ が成り立つ。しかし$\dim(M) \geq 4$ の場合

は等式が成立するかどうか open question である。

定理５はどのようにして証明されたか。このことを次の§で解説しよう。

§６　定理５の証明の解説

まず双曲性をみたす周期点全体の集合 $P(f)$ の分類から始まる。

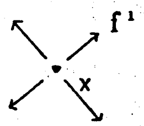
$P_i(f) = \{x \in P(f) \mid \dim(E^s(x)) = i\}$　$(0 \leqq i \leqq \dim(M))$　（iは index とよばれる）。

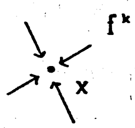
このとき

$P(f) = P_0(f) \cup \cdots \cup P_{\dim(M)}(f)$, $P_i(f) \cap P_j(f) = \phi$ $(i \neq j)$、

$P_0(f)$と$P_{\dim(M)}(f)$は特別な集合である。

$P_0(f) \ni x$ に対して$f^1(x) = x$, $P_{\dim(M)}(f) \ni x$ に対して$f^k(x) = x$ のとき、x の近くの点は図のように挙動する。





このような集合に対しては次が成り立つ。

Step 1 (Pliss[16])　$P_0(f)$, $P_{\dim(M)}(f)$は有限集合かつ $i = 0$, $\dim(M)$ に対して $P_i(f) \cap (\bigcup_{j \neq i} P_j(f)) = \phi$ である。

従って、$P_0(f)$, $P_{\dim(M)}(f)$が空でないとき、それは双曲型である。特に f が拡大的であるときは $P_0(f)$, $P_{\dim(M)}(f)$は空集合である。

各集合$P_i(f)$がすべて有限集合であるときは、それは双曲型集合となる。　よって $\Omega(f) = P_0(f) \cup \cdots \cup P_{\dim(M)}(f)$も双曲型である。従って f が構造安定であれば、f は Morse-Smaleであることが結論される。

しかし一般に$P_i(f)$ $(0<i<\dim(M))$は有限集合ではない。そこで$P_i(f)$の双曲性を示すために次の Step 2 を準備する。

<u>Step 2</u> (Mañé [4,5]), $\exists c > 0,\ 0 < \exists\lambda < 1,\ \forall x \in \overline{P_i(f)}\ (0 < i < \dim(M))$:

$\exists T_xM = E_i(x) \oplus F_i(x)$ (Df-不変分解)

$$\| Df^n|_{E(x)} \| \cdot \| Df^{-n}|_{F(f^n x)} \| < c\lambda^n \quad (n \geqq 0)$$

が成り立つ。

この分解を <u>homogeneous dominated splitting</u> という。実際に分解は連続であることが証明できる。よって $\log\|Df|_{E(x)}\|$, $\log\|Df|_{F(x)}\|$ は x の連続関数である。

各集合 $P_i(f)$ が互いに分離 $(\overline{P_i(f)} \cap \overline{P_j(f)} = \phi,\ i \neq j)$ しているときには、各集合 $P_i(f)$の双曲性は比較的容易に示される（証明は[2]に与えられている）。f が $\mathcal{F}(M)$に属していることから、各集合$\overline{P_i(f)}$の分離を直接示すことはできない。しかし最小な index $i \neq 0$ をもつ $\overline{P_i(f)}$ の双曲性は示すことができる。このことは次の Step 3,4 から理解できる。

<u>Step 3</u> $P_i(f) \neq \phi$ とする。 $\forall \mu \in \mathcal{M}_f^e(\overline{P_i(f)})$ $(=\{\mu \in \mathcal{M}_f(\overline{P_i(f)}) \mid \mu : \text{ergodic}\})$:

$$\int \log\|Df|_{E(x)}\| d\mu < 0 \Rightarrow E_i : \text{contracting}$$

証明には ergodic decomposition theoremとergodic closing lemma[2]を必要とする。

<u>Step 4</u> $\bigcup_{j \neq i} \overline{P_j(f)} \cap \overline{P_i(f)} = \phi \quad \Rightarrow \quad \int \log\|Df|_{E_i(x)}\| d\mu < 0 \quad (\forall \mu \in \mathcal{M}_f^e(\overline{P_i(f)}))$

$P_i(f) \neq \phi$ のとき Step 1, 3, 4 から E_iは contracting であることが示される。

<u>Step 5</u> E_iが contracting ならば、F_i は expanding である。

Mが２、３次元の場合には Step 4, 5から Ω-安定な微分同相写像は Axiom A をみたすことが分かる。実際に、dim(M) = 2 の場合 $P(f) = P_0(f) \cup P_1(f) \cup P_3(f)$ であって,Step 1より $P_0(f), P_2(f)$ は有限集合、Step 4,5 より $\overline{P_1(f)}$ は双曲型が結論される。dim(M) = 3 の場合には、$\overline{P_1(f)}$ の双曲性を求め、その後 f を f^{-1} におきかえて $\overline{P_2(f)}$ の双曲性を求めることができる（dim(M) = 2 の場合はすでに Mañé, Liao, Sannami が証明していた）。

問題の解決の困難さは dim(M) ≧ 4 の場合にある。この困難さを Mañé は assymptotic Borel確率測度を利用することによって乗り越えている。この様子は Step 6 で述べる。

dominated splitting $T_{\overline{P_1(f)}}M = E_1 \oplus F_1$ に対して、閉近傍 $U \supset \overline{P_1(f)}$ が存在して $M(f,U) = \bigcap_{-\infty}^{\infty} f^j(U)$とおくと、M(f,U)上で dominated splittiing $T_{M(f,U)}M = \hat{E}_1 \oplus \hat{F}_1$ が成り立ち、$\forall x \in \overline{P_1(f)} \subset M(f,U)$に対して $\hat{E}_1(x) = E_1(x)$, $\hat{F}_1(x) = F_1(x)$ をみたすようにできる。

dominated splitting の存在は M 上の section から成る Banach多様体上で精密な解析を使って証明される。しかし証明は [1] には与えられていない。Step 5 の証明の概略を説明しよう。

$0 < \hat{\gamma} < 1$ とする。$\hat{\gamma} < \forall \gamma < 1$, $\forall \delta > 0$: $\exists \varepsilon = \varepsilon(\gamma,\delta) > 0$,$\exists N = N(\gamma,\delta) > 0$, $\exists n_i > 0$:

(i) $(x_i, f^{n_i}(x_i))$: γ-string(i.e. $\prod_{\ell}^{n_i} \| Df^{-1}|_{F_1(f^{\ell} x_i)} \| < \gamma^n$, $1 \leqq \forall \ell < n_i$),

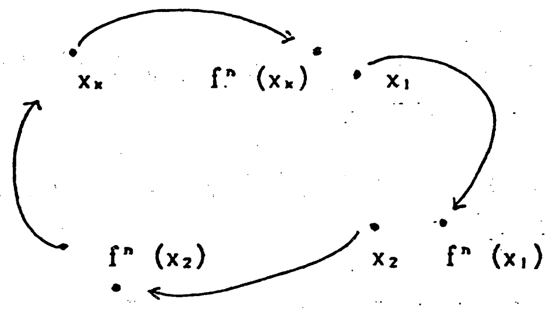
(ii) $d(f^{n_i}(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$ $(1 \leqq i \leqq k-1)$,

(iii) $d(f^{n_k}(x_k), x_1) < \varepsilon$

が成り立つようにできる。特に、F_1 が expanding でないと仮定すると、

(iv) $\prod_{1}^{n_i} \| Df^{-1}|_{F(f^j x_i)} \| > \hat{\gamma}^n$ $(1 \leqq i \leqq k)$

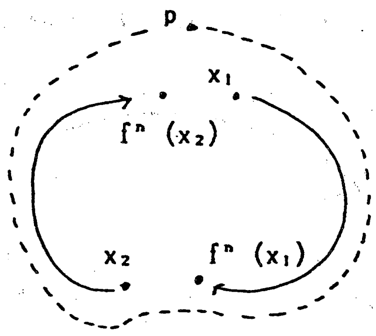
をみたすように点列 $\{x_1, \cdots, x_k\}$が選べる。



このとき E_1 が contracting であれば、$0 < \mu < 1$ が存在して

$$f(W^s_{\varepsilon}(x) \subset W^s_{\mu\varepsilon}(fx) \quad (x \in \overline{P_1(f)})$$

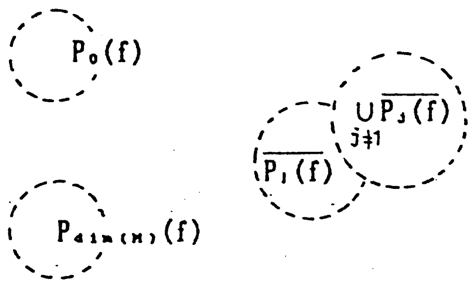
が成立する。このことから図のように挙動する周期点 $p \in M(f,U)$ の存在が示される。簡単のために $k = 2$の場合を考えると、$f^j(p)$ は pseudo orbit $\{x_1, f(x_1), \cdots, f^n(x_1), x_2, \cdots, f^n(x_2)\}$ を十分近くで trace している。よって $\hat{\gamma}^N \leqq \prod_{1}^{N} \| Df^{-1}|_{F(f^j p)} \|$ $(N = n_1 + n_2)$ が求まる。$p \in P_1(f)$が示され、双曲性によって、$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \log \| Df^{-1}|_{F(f^j p)} \| \leqq \lambda$ が成り立つから、$\hat{\gamma}$ を $\hat{\gamma} > \lambda$ をみたすように選べば矛盾が生ずる。故に F_1はexpanding

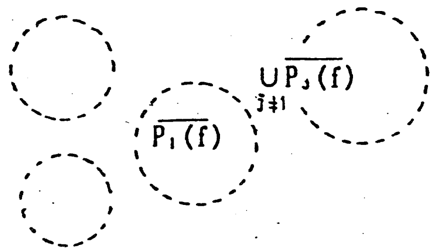


でなければならない。

$\overline{P_1(f)}$ の双曲性が示されても、$\overline{P_i(f)}$ $(i \neq 1)$ の双曲性を調べることが残されている。次の2つの場合を考える。

(i) $\overline{P_1(f)} \cap (\bigcup_{j \neq 1} \overline{P_j(f)}) \neq \phi$,　　(ii) $\overline{P_1(f)} \cap (\bigcup_{j \neq 1} \overline{P_j(f)}) = \phi$





(ii) の場合は $\overline{P_1(f)}$ が他と分離しているから、$P_2(f) \neq \phi$ のとき $\overline{P_2(f)}$ は双曲型であることが Step 4,5 から求まる。(i) の場合は Step 4,5 は使えない。そこで f に小さな摂動を行い heteroclinic point または homoclinic point を創り出す。小さな C^1-摂動を行う方法に次の Step 6,7 がある。

Step 6 (Mañé [3]) $\Lambda \subset \Omega(f)$ は双曲型集合とする。

$x \in \Omega(f) - \Lambda$ に対して部分列 $\{f^{n_i}(x)\}$ が存在して $\mu = \lim \frac{1}{n_i}\sum_{1}^{n_i} \delta_{f^i(x)} \in m_f(M)$ が成り立つ。この μ に対して $\mu(\Lambda) > 0$ であると仮定する。このとき、$\forall u(f) \subset \mathrm{Diff}(M)$, $\forall U \supset \Lambda$ (閉近傍) : $\exists g \in u(f)$, $\Lambda \subset \exists V \subset U$,

$$f|_{V \cap U^c} = g|_{V \cap U^c} \ , \quad f^{-1}|_{V \cap U^c} = g^{-1}|_{V \cap U^c}$$

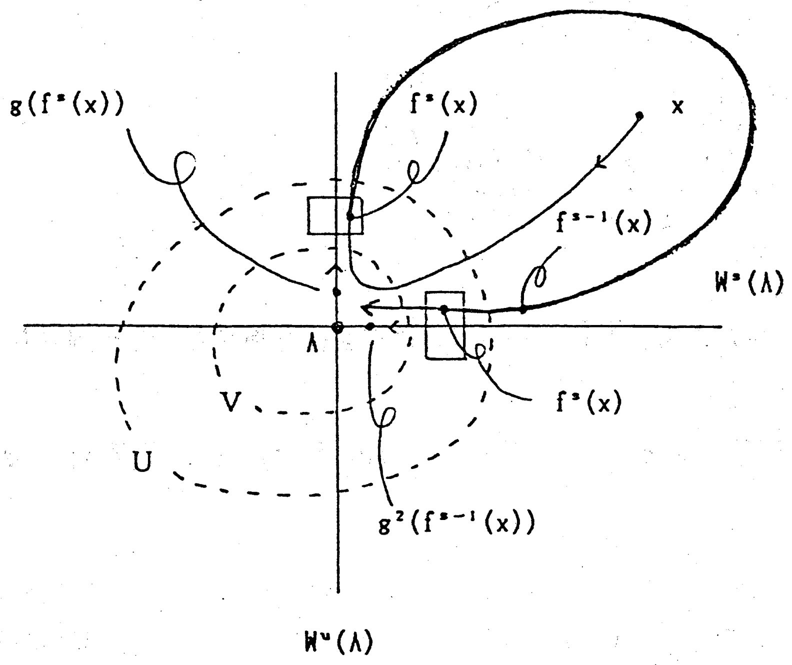
をみたし、更に次の (I),(II) のいずれかが成り立つ:

(I)　$\exists k > 0$, $0 < \exists s_0 < \exists s_1 < n_k$

(1)　$g^j(f^{s_0}(x)) = f^j(f^{s_0}(x))$ $(0 \leqq j < s_1 - s_0)$

(2)　$g^{-2}(f^{s_0}(x)) \in \bigcap_{n \geqslant 0} g^n(V) = \bigcap_{n \geqslant 0} f^n(V) \subset W^u(\Lambda, g)$

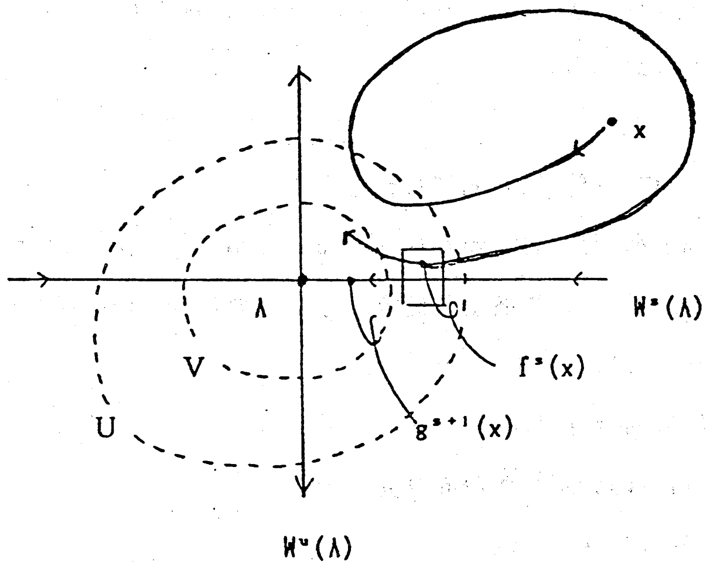
(3) $g^{s_1 - s_0 + 1}(f^s(x)) \in \bigcap_{n \geq 0} g^{-n}(V) = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(V) \subset W^s(\Lambda, g)$



(I) $\exists k > 0$, $0 < \exists s < n_x$

(1) $g^j(x) = f^j(x) \quad (0 \leqq j < s)$

(2) $g^{s+1}(x) \in \bigcap_{n \geq 0} g^{-n}(V) = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(V) \subset W^s(\Lambda, g)$



この命題は $\mu(\Lambda) > 0$ であることが本質的である。

点 $x \in \Omega(f)-\Lambda$ の f による軌道の挙動が Borel確率測度によってとらえることができないときには、次の Step 7 の摂動を考える。

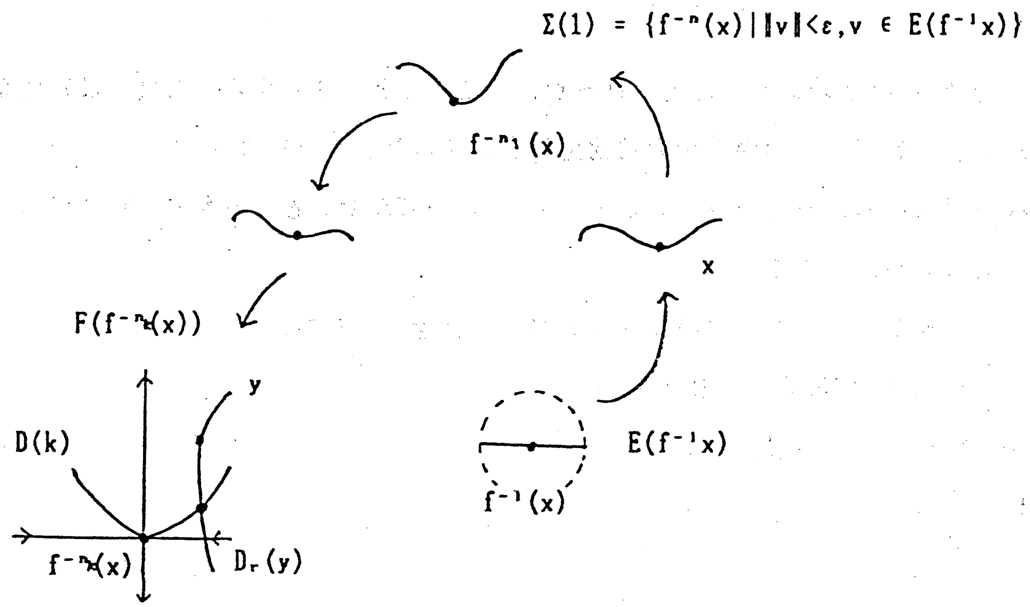
Step 7　点 $x \in \Omega(f)-\Lambda$が $f^{-n_x}(x) \to y(\notin \Lambda)$ $(n_x \to \infty)$ をみたすとする。このとき $\forall\delta > 0$, $\forall U \ni x$, $\forall u(f) : \exists g \in u(f)$, $\exists \ell > 0$ 、

(1)　$f^{-1}(x) = g^{-1}(x)$　$(x \notin U)$

(2)　$d(f^{-n}(x), g^{-n}(x)) < \delta$　$(0 < n < l)$,

(3)　$g^{-l}(x) \in W^u(y)$

が成り立つようにできる。



$d(x,y)<\delta$なる十分小さな δ に対して、x から y への平行移動：$\tau(x,y):T_xM \to T_yM$ が minimal geodesic に沿って定義できる。$\phi:M \to [0,1]$ は C^∞-関数、 $y \in U$ に対して $\phi(y) = 0$, $\phi(f^{-1}x) = 1$ をみたすとする。

$\|v\|<\delta$ なる $v \in T_{f(x)}M$ に対して

$$\xi_v(y) = \begin{cases} 0 & (y \notin U) \\ \phi(y)\tau(f^{-1}(x), y)v & (y \in U) \end{cases}$$

とおき、

$$f^{-1}(y) = \exp_{f(y)} \circ \xi_v \circ f^{-1}(y) \quad (y \in M)$$

を定義する。このとき$f_v^{-1}: M \to M$ は微分同相写像である。

$c > 0$ が存在して微分写像

$$\phi : \{w \in \Sigma(k) \mid \|w\| < c\} \to F(f^{-n_k}x)$$

が定義されグラフ

$$D(k) = \{ w + \phi(w) \mid w \in E(f^{-n_k}x), \|w\| < c \}$$

は $\exp^{-1}(W^u(y) = D_r(y)$ と共通部分をもつ（このことは y と $f^{-n_k}(x)$ が十分近くになるように n_k を選んでいるから）。共通部分の１点を v とするとき f_v が f の摂動である。

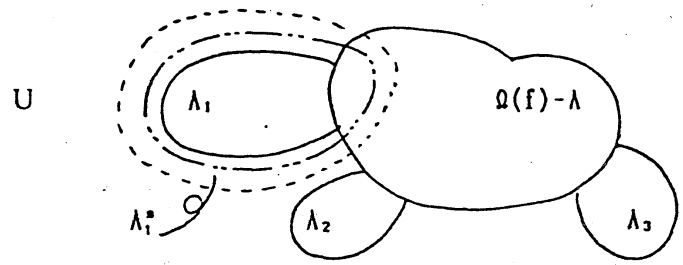
Step 6,7 はどのように適用されるか。このことを説明する。$\overline{P_1(f)}$ は双曲型であったから、Λ を $\Omega(f)$ の中の最大双曲型集合とすると、$\overline{P_1(f)} \subset \Lambda$ である。Λ に対して spectral decomposition $\Lambda = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_k$ が可能である。簡単のために、$k = 3$ 即ち $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3$とする。

今、$\Lambda_1 \subset U$，$\Lambda_1 = \cap f^n(U)$なるコンパクト近傍 U を選ぶ。

$\Lambda_1^* = \bigcap_0^\infty f^{-j}(U)$とおく。このとき

$$\phi \neq \Lambda_1^* - \Lambda_1 \subset \Omega(f) - \Lambda$$

が成り立つ。



各点 $p \in \Lambda_1^* - \Lambda_1$は $d(f^n(p), \Lambda_1) \to 0 \ (n \to \infty)$をみたす。次の場合が考えられる。

(i) $p \in \alpha(p)$,　　(ii) $p \notin \alpha(p)$

(i)の場合、$\{f^{-n}(p) : n \geqq 0\}$ の部分列 $\{f^{-n}(p) : j \geqq 0\}$ が存在して、$f^{-n}(p) \to$

$y(\in \Lambda_1)$とできる。今、Borel不変測度

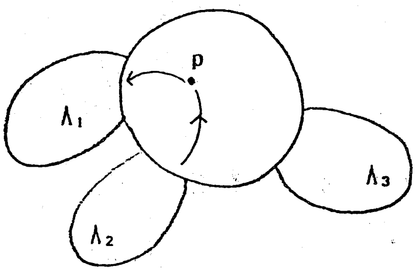
$$\mu = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} \delta_{f^{-k}(p)}$$

を定義する。このとき(i)' か (ii)' が成り立つ。

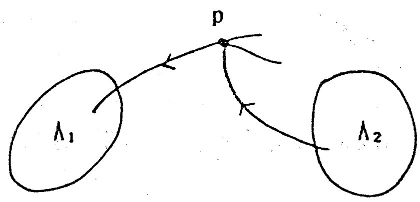
(i)' $\int \log \| Df^{-1}|_F \| d\mu > 0$

(ii)' $\int \log \| Df^{-1}|_F \| d\mu \leqq 0$

(i)'の場合には $\mu(\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3) > 0$ が示される。$\mu(\Lambda_2) > 0$ であるとしよう。Step 6 によって



f の小さな摂動 g があって $W^s(\Lambda_1, g) \cap W^u(\Lambda_1, g) \neq \phi$ が成り立つ。



特別の場合を説明したが、すべての場合に Step 6,7 を使って小さな C^1-摂動を得ることができる。

Step 8　$(\Omega(f)-\Lambda)-\Lambda_1$ が閉集合でなければ、$(\Omega(f)-\Lambda)-\Lambda_r$が閉集合でない Λ_r と摂動 g が存在して

$$W^s(\Lambda_1, g) \cap W^u(\Lambda_r, g) \neq \phi$$

が成り立つ。

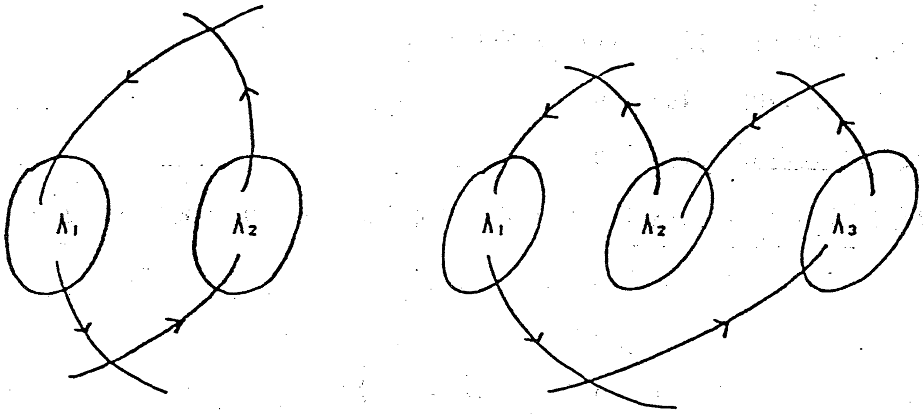
$W^s(\Lambda_1, g) \cap W^u(\Lambda_2, g) \neq \phi$ となる摂動 g が存在して、$g \in \mathcal{J}(M)$ であるから、再び Step 8 が適用できて、小さな摂動 g' が存在して

$$W^s(\Lambda_2, g') \cap W^u(\Lambda_3, g') \neq \phi$$

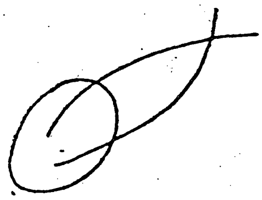
あるいは

$$W^s(\Lambda_2, g') \cap W^u(\Lambda_2, g') \neq \phi$$

が成り立つ。結果的に次の図のような２つの cycle 条件のいずれかが成り立つ。



このような状況は必ず次の図のような状況を創り出す。



しかし、Smale homoclinic point theorem に反する。よって cycle 条件を構成する途中の摂動 g' で

$$\overline{P_1(g')} \cap (\bigcup_{j\neq 1} \overline{P_j(g')}) = \phi$$

が成り立つ。以後同じ仕方を帰納的にくりかえせば、f の小さな摂動 g によって $\{\overline{P_j(g)}\}$ は互いに分離する。よって $\Omega(g)$ は双曲型、すなわち g は Axiom A である。故に、f は Axiom A をみたす g によって近似される。

定理５の証明の１部を解説した。

Mañé の論文[1] には証明が不正確であったり、誤りを起こしている箇所がある。 また Palis の論文[6] には意味不明な箇所がある。しかし、２つの論文に対して証明を付け加えたり、訂正することができる。

文献は解説の中で引用した論文だけを記述した。安定性問題に関する論文は他に多数発表されている。

参 考 文 献

1. R.Mañé, A Proof of the C^1 stability conjecture, Pub.Math.IHES 66 (1987),161-210.
2. R.Mañé, An ergodic closing lemma, Ann.of Math. 116 (1982), 503-540.
3. R.Mañé, On the creation of homoclinic points, Pub.Math.IHES 66 (1987), 139-159.
4. R.Mañé, Contribution to the stability conjectures, Topology 17 (1978), 383-396.
5. R.Mañé, Expansive diffeomorphisms, Proc.Warwick Sym.Dyn.Sys.Lecture notes 468 (1975).
6. J.Palis, On the C^1 Ω-stability conjecture, Pub.Math.IHES 66 (1987), 211-215.
7. J.Palis, A note on Ω-stability, Proc.AMS Symp. in Pure Math. 14 (1970), 223-231.
8. S.Smale, The Ω-stability theorem, Proc.AMS Symp. in Pure Math. 14 (1970), 289-297.
9. S.Smale, Diffeomorphisms with many periodic points, Differential and Combinatorial Topology, Princeton Univ.Press, Princeton N.J.(1965),63-80.
10. J.Franks, Necessary conditions for stability of diffeomorphisms, Trans.AMS, 158 (1971),301-308.
11. C.Pugh and C.Robinson, The C^1 closing lemma, including Hamiltonians, Erg.Th.and Dynam.Sys. 3 (1983),261-313.
12. M.Hirsch, J.Palis, C.Pugh and M.Shub, Neigborhoods of hyperbolic sets, Invent. Math. 9 (1969/70),121-134.
13. J.Robin, A structural stability theorem, Ann.of Math. 94 (1971),447-493.
14. C.Robinson, Structural stability of C^1-diffeomorphisms, J.differential eg. 22 (1976),28-73.
15. C.Robinson, C^r Structural stability implies Kupka-Smale, Dynamical Systems, Academic Press (1975),443-449.
16. V.A.Pliss, On a conjecture due to Smale, Diff.Uravnija 8 (1975), 553-555.